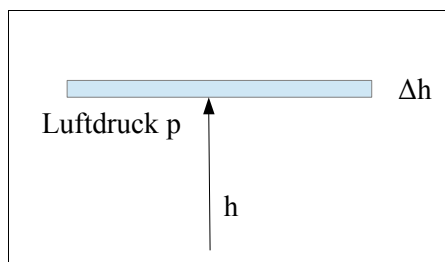


# Natürliches Wachstum

Einen leicht verständlichen Einstieg in die Analysis (oder Infinitesimalrechnung) bietet das mathematische Prinzip des Natürlichen Wachstums. Jedermann kennt es – zumindest irgendwie intuitiv – und weiß nur nicht, dass er damit bereits auch die wunderschöne mathematische Exponentialfunktion kennt. Deshalb braucht niemand vor den folgenden Erläuterungen zurückzuschrecken.

Diese Funktion sei hier am Beispiel des Luftdrucks in Abhängigkeit von der Höhe erklärt. Es läuft auf die so genannte „barometrische Höhenformel“ hinaus. Es ist jedermann bekannt, dass man beim Bergsteigen ab einer gewissen Höhe ins Japsen gerät. Dies liegt dann nicht allein an den vorangegangenen Anstrengungen, sondern zumindest *auch* daran, dass mit steigender Höhe die Luft immer dünner und somit der Luftsauerstoff immer rarer wird. Die Besteigung des Mount Everest ohne Atemgerät im Jahre 1978 (Reinhold Messner und Peter Habeler) galt als eine sportliche Sensation.

Um die Abnahme des Luftdrucks quantitativ zu erklären, brauchen wir keine solche Bravourleistung. *Dass* er abnimmt, bedarf keiner weiteren Begründung, wir sind aber an einem Zahlenzusammenhang zwischen Druck und Höhe, also einer *Funktion* interessiert. Hierzu betrachten wir nicht den Luftraum im Ganzen, sondern nur eine dünne horizontale Schicht, in der wir uns gerade befinden. Sie habe die Dicke  $\Delta h$  (gesprochen Delta h), wir befinden uns in Höhe  $h$ , und in dieser Luftschicht herrsche der Luftdruck  $p$ :



Es ist nun von Interesse, um welchen Betrag  $\Delta p$  der Luftdruck steigt, wenn wir um  $\Delta h$  nach oben klettern. Da der Druck allgemein als Kraft/Fläche definiert ist, benötigen wir die Kraft (= Gewicht  $G$ ) der Luft in der Schicht  $\Delta h$ . Dieses Gewicht, leicht einzusehen, ist  $G = \text{Dichte} \cdot \text{Fläche} \cdot \Delta h$ . Die Dichte kann beinahe als ein anderes Wort für Luftdruck bezeichnet werden, jedenfalls sind sie zueinander proportional. Da sich die Fläche herauskürzen lässt, kommen wir zu der simplen Beziehung:

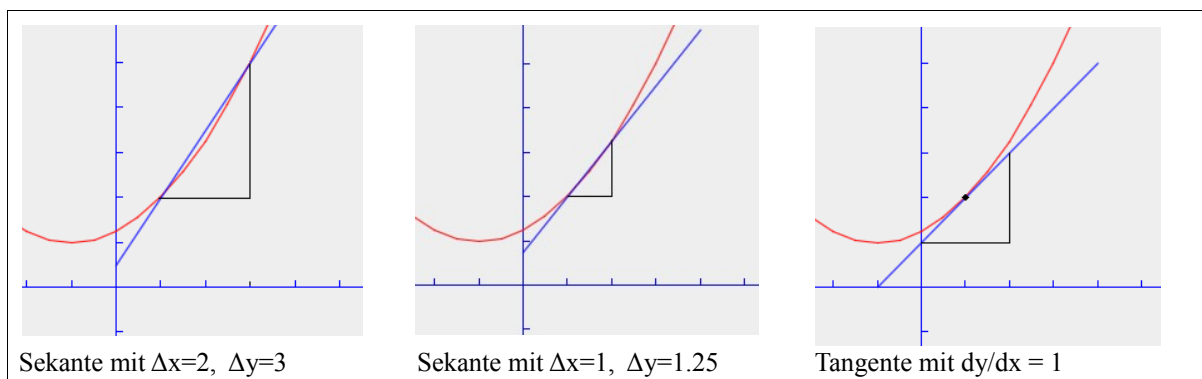
$$\Delta p \approx p \cdot \Delta h \quad \text{oder} \quad \Delta p = k \cdot p \cdot \Delta h$$

Dabei ist  $k$  ein konstanter Proportionalitätsfaktor, der hier vorerst nicht weiter von Interesse ist. (Es gehen hier die Erdgravitation, die allgemeine Gaskonstante und das Molekulargewicht ein, s.u.) Wichtig ist nur, dass der Quotient  $\Delta p / \Delta h$  zu  $p$  proportional ist:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = k \cdot p$$

Was jetzt kommt, ist ganz wichtig. Bis hierher war dieses mysteriöse  $\Delta h$  eine endliche Größe, sagen wir einmal 1 Meter Schichtdicke. Wenn wir diese immer weiter verkleinern, über 10cm, 1cm, 1mm und so fort, bis der Arzt kommt, dann sagen wir, die Dicke „geht gegen 0“. Dann ersetzen wir den Quotienten  $\Delta p / \Delta h$  durch  $dp/dh$  und sprechen von den *Differentialen* der beiden Variablen, und statt des Differenzenquotienten vom *Differentialquotienten*.

Dies soll kurz anhand der folgenden Bildchen erläutert werden. Die rote Kurve ist eine Parabel mit einer Funktionsgleichung, die uns hier gar nicht interessiert. Es geht um den Zuwachs der Funktion im Punkte (1, 2). Durch diesen Punkt ziehen wir eine Sekante, die die Kurve im Punkt (3, 5) schneidet (linkes Bild).



Die Steigung dieser Geraden beträgt, wie leicht ersichtlich ist,  $\Delta y/\Delta x = 1.5$ . Dies ist aber noch nicht die gesuchte Steigung in dem genannten Punkt, sondern wir müssen uns ihr annähern, indem wir die beiden Punkte der Sekante aneinanderrücken.

Dies ist im mittleren Bild geschehen: Das Steigungsdreieck hat jetzt die Kanten 1 und 1.25 und entspricht der Steigung 1.25, also einem schon etwas flacheren Wert. Eine immer weiter gehende Verfeinerung führt schließlich zu einer Tangente, die mit der Kurve nur noch einen Punkt, den Berührungspunkt, gemeinsam hat. Die Delta-Werte gehen jetzt über in die Differentiale  $dy$  und  $dx$ , deren Quotient die Steigung an dem betreffenden Punkt beträgt. Dies ist der genannte Differentialquotient.

Dieser höchst wichtige Begriff der Infinitesimalrechnung ist die bekannte „1. Ableitung“, auch als  $y'$  bezeichnet. Sie ist zu deuten als ein Maß für den *Verlauf* einer Funktion. Man sieht leicht ein, dass diese wiederum eine Funktion von  $x$  ist, die auch ihrerseits wieder „differenziert“ werden kann und dann die 2. Ableitung ( $y''$ ) bildet und so fort.

Es liegt, um auf das obige Beispiel zurückzukommen, – man höre und staune – eine so genannte *Differentialgleichung* vor. Gesucht ist eine Funktion  $p(h)$ , deren **1. Ableitung  $dp/dh$  sie selbst** ist. Dieser im Grunde einfache Zusammenhang führt zu einer wunderschönen Funktion, die diese Eigenschaft hat: Es ist die bekannte **Exponentialfunktion  $e^x$** . Diese und nur diese Funktion hat die genannte Eigenschaft, die man auch so formulieren kann:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Dass dies so ist, ist ganz und gar kein unergründliches Geheimnis, sondern basiert schlicht und einfach auf der Definition der nach Euler benannten Zahl  $e$  selbst. Wenn man diese nämlich mit immer kleiner werdenden Exponenten potenziert (anders ausgedrückt: eine immer höher basierte Wurzel aus ihr zieht), so strebt das Ergebnis immer näher gegen 1. Formelmäßig ausgedrückt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Die Eulersche Zahl  $e$  trägt ihr eigenes Wachstum sozusagen im Bauch mit sich herum. Sie ist zu verstehen als das Ergebnis der Potenzierung einer immer näher an 1 liegenden Zahl mit immer größer werdenden Exponenten. Sie wurde natürlich mit Absicht so definiert, weil sich erahnen ließ, welche Funktionalität sich dahinter verbirgt.

Wie man hieraus auf die obige Differentialgleichung kommt, ist nun ganz einfach: Der Quotient  $\Delta y/\Delta x$  in den Steigungsdreiecken in den Bildchen lässt sich ja schreiben als:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{(x + \Delta x)} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \quad (\text{nach Ausklammerung von } e^x)$$

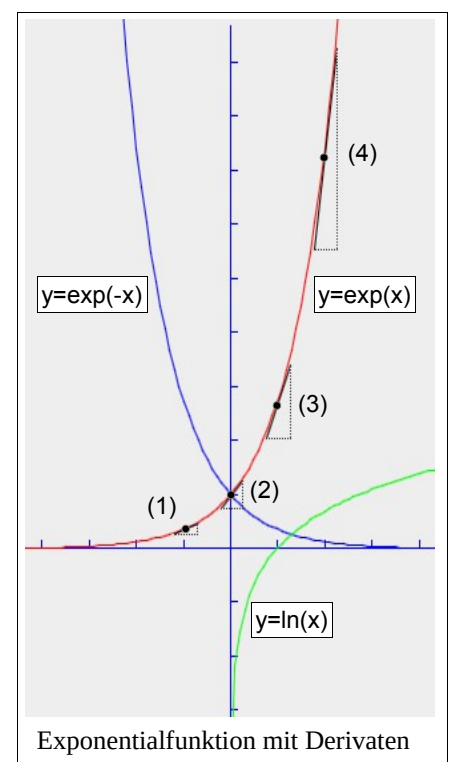
Der Bruch strebt bei immer kleiner werdendem  $\Delta x$  gemäß obiger Definition gegen 1, kann also aus der Gleichung gestrichen werden, und es resultiert  **$dy/dx = de^x/dx = e^x$** .

In Computeranwendungen wird die Funktion gerne  $\exp(x)$  genannt. Sie hat als Kurve die Gestalt der roten Linie in nebenstehendem Diagramm. An einigen Stellen, numeriert von (1) bis (4) sind die Tangenten angedeutet. Sie liegen an den  $x$ -Werten  $-1$ ,  $0$ ,  $+1$  und  $+2$ . Wenn man nachmisst, erkennt man, dass ihre Steigungen den Funktionswerten selbst entsprechen: ca. 0.37 ( $=e^{-1}$ ), 1.00 ( $=e^0$ ), 2.72 ( $=e$ ) und 7.39 ( $=e^2$ ).

Ferner enthält das Diagramm die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten (blaue Linie), also die Spiegelung an der  $y$ -Achse. Von ihr wird weiter unten noch die Rede sein.

Die grüne Kurve schließlich ist die Umkehrfunktion, der Logarithmus zur Basis  $e$ . Man nennt ihn den *logarithmus naturalis* und pflegt ihn mit dem Symbol **ln** abzukürzen (während mit  $\log$  im allgemeinen der Zehnerlogarithmus gemeint ist). Diese Umkehrfunktion ist ebenfalls eine Spiegelung, allerdings an der Diagonalen links unten nach rechts oben, die man auch die 1. Winkelhalbierende nennt. Der **ln** ist nur für  $x$ -Werte  $> 0$  definiert, was umgekehrt bedeutet, dass die ganze  $\exp$ -Funktion im positiven Bereich  $y > 0$  liegt.

Dieser Logarithmus spielt eine außerordentlich große Rolle in Physik und Chemie. Man schlage den Brdicka, Lehrbuch der Physikalischen Chemie auf, und man wird kaum eine Seite finden, wo der  $\ln$  nicht vorkommt. (Ein bisschen übertrieben, gell)



Bei  $\exp(x)$  handelt es sich also um die berühmte Funktion des Natürlichen Wachstums, also die Funktion, **die an jeder Stelle ihrem eigenen Zuwachs entspricht**. Man darf den Exponenten auch mit einem beliebigen Faktor versehen, den man dann für die Ableitung davor schreiben muss:

$$\frac{de^{kx}}{dx} = k \cdot e^{kx}$$

(Letzteres nennt man die „Kettenregel“ der Differentialrechnung). Der Faktor  $k$  darf auch negativ sein. Dies führt dann nicht zu einem Zuwachs, sondern im Gegenteil zur **Abnahme** eines Wertes. Ansonsten bleibt alles gleich.

Die barometrische Höhenformel nimmt nun die Gestalt an, unter der sie jeder Physiker (und natürlich auch jeder andere Naturwissenschaftler) kennt:

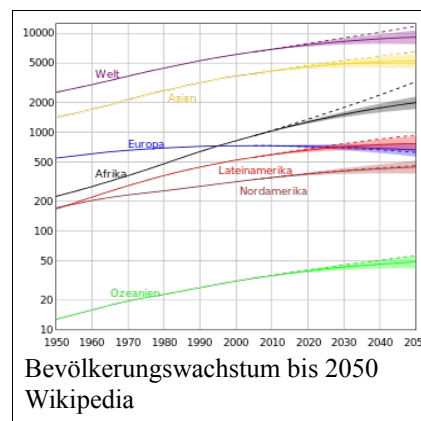
$$p_h = p_0 \cdot e^{-k \cdot h} \quad \text{mit } k = M \cdot g / R \cdot T$$

Hierbei ist  $p_0$  der Luftdruck am Erdboden (Höhe 0), und der Faktor  $k$  im Exponentialterm, der oben verschwiegen wurde, setzt sich zusammen aus dem Molgewicht  $M$  der Luft (zu 78% Stickstoff, 21% Sauerstoff, 1% Argon), der Erdgravitation  $g$ , der Gaskonstanten  $R$  und der Temperatur  $T$ . Aber darauf kommt es wie gesagt nicht an. Wichtig ist nur, dass das Natürliche Wachstum eine Funktion ist, deren Zuwachs (bzw. Abnahme) linear von sich selbst abhängt.

Eigentlich kennt jeder diesen Zusammenhang aus dem täglichen Leben. Jeder Baum wächst umso schneller, je höher er bereits ist. Würde man den Zuwachs messen, würde man sehen, dass er proportional zur bisherigen Höhe ist. Wenn ich ein Sparkonto habe und jemanden frage, wieviel Zinsen ich zu erwarten habe, so wird er nicht antworten: 15,60€ oder 129,25€, sondern er wird ganz selbstverständlich zurückfragen, wie hoch denn das angesparte Kapital sei, wohlgemerkt nicht das Startkapital, sondern der bereits erreichte aktuelle Kontostand. Dann kann man den jährlichen Zins errechnen, diesen wieder zum Kapital hinzuschlagen und so fort. Im Unterschied zum Wachstum des Baumes geschieht diese Bilanzierung allerdings in festen Zeitabständen. Würde man die Verzinsung nicht jährlich, sondern monatlich, täglich oder in beliebig kleinen Abständen vornehmen, so hätten wir wieder den oben genannten Übergang vom Delta zum Differential, und es würde auch hier eine  $e$ -Funktion resultieren.

Ein bekannter Fall des negativen Wachstums, also der Abnahme, liegt auch beim radioaktiven Zerfall vor, dessen Verlauf ebenfalls der  $e$ -Funktion mit negativem Exponenten folgt. Innerhalb eines festen Zeitintervalls zerfällt immer die Hälfte des betreffenden Materials. Man nennt dieses Intervall die *Halbwertszeit*.

Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel ist die biologische Vermehrung z.B. von Bakterien, die aber auch auf die globale Bevölkerungsexplosion der Menschheit anwendbar ist. Viele Menschen – vielleicht die meisten – wollen es bis heute nicht wahrhaben, dass hier eine Katastrophe unmittelbar bevorsteht. Man beachte, dass in der Senkrechten im Bild bereits ein logarithmischer Maßstab vorliegt, d.h. es bestehen gleiche Abstände zwischen den Marken 10 – 100 – 1000 – 10000. Jedes Intervall bedeutet also nicht einen Anstieg um einen konstanten Betrag, sondern in dieser Skala eine Verzehnfachung! Dass hier die Basis 10 verwendet wird, ist nebensächlich: Die Funktion  $10^x$  hat denselben Charakter wie  $e^x$ . Wenn sich die Extrapolation gemäß diesem Bild bewahrheitet, wird unser Globus im Jahre 2050 ca. **20 Milliarden Menschen** ernähren müssen.



Zurück zur Mathematik. Diese Ausführung kann aufgefasst werden als ein wichtiger erster Schritt, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was die Methodik der Differentialrechnung beinhaltet. Verlangt wird eigentlich nur ein einziger gedanklicher Abstraktionsschritt, der sich mit dem Übergang einer endlichen Differenz in einen irgendwie „unendlich kleinen“ Schritt auseinandersetzt. Dies ist so ein Fall, in dem unsere hausgemachte Vorstellung versagt, aber der mathematische Formalismus weiterhilft.

### ***Mathematik hilft uns, die Welt zu verstehen.***

(Dies sagt Albrecht Beutelspacher, Mathematiker an der Universität Gießen, stets in seinen einleitenden Worten in der Serie „Mathematik zum Anfassen“).